

Übungsblatt 5

Definition(en): Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \{0, 1\}$ heißt *Bernoulli-verteilt* mit Parameter $p \in [0, 1]$, auch geschrieben als $X \sim \text{Ber}(p)$, wenn

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \{0, 1, \dots, n\}$ heißt *binomialverteilt* mit Parameter n und p , auch geschrieben als $X \sim \text{Bin}(n, p)$, wenn für $k = 0, \dots, n$

$$\mathbb{P}(X = k) = b(k, n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{N}$ heißt *geometrisch verteilt* mit Parameter p , auch geschrieben als $X \sim \text{Geo}(p)$, wenn

$$\mathbb{P}(X = i) = p \cdot (1 - p)^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe P1 Charakterisierung der geometrischen Verteilung als gedächtnislos.

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N} heißt *gedächtnislos*, falls sie die Bedingung

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable X genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Hinweis: Unter Annahme der Gedächtnislosigkeit kann für $g(x) := \mathbb{P}(X > x)$ gezeigt werden, dass $g(x+1) = g(1) \cdot g(x)$ gilt. Bei der anderen Richtung kann verwendet werden, dass $\sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ für $0 < \alpha < 1$ ist.

Lösung: Erstellt von Meier-Hans 10.11.2015

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=1}^k (1-p)^{i-1} \cdot p = p \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i = p \cdot \frac{(1-p)^k - 1}{1-p-1} = 1 - (1-p)^k.$$

Somit gilt $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$. Nun zeigen wir, dass dies genau dann gilt, wenn X gedächtnislos ist.

Sei X geometrisch verteilt. Es gilt also $\mathbb{P}(X > i) = q^i$ für $q := 1 - p$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > y + x \cap X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\mathbb{P}(X > y + x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{q^{y+x}}{q^x} = q^y = \mathbb{P}(X > y).$$

Also ist X gedächtnislos.

Nun sei X gedächtnislos. Es gelte also $\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$. Es sei $g(x) := \mathbb{P}(X > x)$, dann gilt

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \mathbb{P}(X > x+1) = \mathbb{P}(X > x+1 | X > x) \cdot \mathbb{P}(X > x) \\ &= \mathbb{P}(X > 1) \cdot \mathbb{P}(X > x) = g(1) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Nun gilt $g(1) = q$ für ein $q \in (0, 1)$ und sei $p := 1 - q$. Induktiv folgt $g(k) = q^k$ und somit

$$\mathbb{P}(X = k) = g(k-1) - g(k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1} \cdot (1 - q) = q^{k-1} \cdot p.$$

Also handelt es sich um eine geometrische Verteilung.

Aufgabe P2 Würfelspiel.

Zwei Spieler A und B würfeln abwechselnd mit einem fairen Würfel, wobei A beginnt. Wer die erste 6 würfelt gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A ?

Lösung: Sei X die Zufallsvariable, die angibt, bei welchem Wurf das Spiel beendet wird. Damit ist X geometrisch verteilt mit $p = \frac{1}{6}$. Spieler A gewinnt genau dann, wenn die 6 bei einem ungeraden Wurf fällt. Mit $A := \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt gleich:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A) &= f_X(1) + f_X(3) + f_X(5) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} \approx 0.55 \end{aligned}$$

wobei wir die geometrische Reihe benutzt haben.

Aufgabe H1 Würfel-Münzen-Spiel.

Man würfelt mit einem fairen Würfel einmal. Anschließend wirft man eine faire Münze so häufig, wie die Augenzahl des Würfels anzeigt.

- Angenommen Sie haben drei Kopftreffer (der Münze), mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mit dem Würfel eine gerade Zahl geworfen?
- Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl Kopftreffer?

Lösung: a) Sei X die Augenzahl des Würfels und Y die Anzahl der Kopftreffer. Es ist X gleich verteilt auf $\{1, \dots, 6\}$ ($\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$ für $i \in \{1, \dots, 6\}$). Die bedingte Verteilung von Y bei gegebenem $X = n$ ist binomial verteilt mit Parameter n und $p = \frac{1}{2}$, d.h.:

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \in \{2, 4, 6\} | Y = 3) &= \frac{\mathbb{P}(X \in \{2, 4, 6\}, Y = 3)}{\mathbb{P}(Y = 3)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(Y = 3, X = 2) + \mathbb{P}(Y = 3, X = 4) + \mathbb{P}(Y = 3, X = 6)}{\sum_{k=3}^6 \mathbb{P}(Y = 3 | X = k) \mathbb{P}(X = k)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(Y = 3 | X = 2) \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(Y = 3 | X = 4) \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(Y = 3 | X = 6) \mathbb{P}(X = 6)}{\sum_{k=3}^6 \mathbb{P}(Y = 3 | X = k) \mathbb{P}(X = k)} \\
 &= \frac{0 \cdot \frac{1}{6} + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{6}}{\binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{6}} \\
 &= \frac{9}{16} = 0.5625
 \end{aligned}$$

b) Da die bedingte Verteilung von Y bei gegebenen $X = n$ binomial verteilt mit Parameter n und $\frac{1}{2}$ ist nach Vorlesung $\mathbb{E}[Y | \{X = n\}] = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$. Somit gilt nach einem Satz aus der Vorlesung:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=1}^6 \mathbb{E}[Y | \{X = n\}] \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^6 \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^6 n = \frac{1}{12} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

Aufgabe H2 Korbleger.

Ein Erwachsener und ein Kind werfen einen Ball in einen Korb. Der Erwachsene hat eine Trefferquote von 50%, das Kind eine von 25%. Wer mehr Treffer hat, der gewinnt. Der Erwachsene wirft zwei Mal und überlegt sich, dass es fair ist, das Kind vier Mal werfen zu lassen. Wer gewinnt dann mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Lösung: Sei X die Anzahl der Treffer des Erwachsenen bei zwei Würfeln und Y die Anzahl der Treffer des Kindes bei vier Würfeln. Es ist X binomial verteilt mit Parameter 2 und 0,5 und Y ist binomial verteilt mit Parameter 4 und 0,25 und X, Y sind unabhängig. (0,5 Punkte) Aus der Formel für die Binomialverteilung erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = 0) &= \binom{2}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 = 0.25 & \mathbb{P}(X = 1) &= 0.5 & \mathbb{P}(X = 2) &= 0.25 \\
 \mathbb{P}(Y = 0) &\approx 0.3164 & \mathbb{P}(Y = 1) &\approx 0.4219 & \mathbb{P}(Y = 2) &\approx 0.2109.
 \end{aligned}$$

(0,5 Punkte) Der Erwachsene gewinnt mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X > Y) &= \mathbb{P}((X, Y) \in \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}) \\
 &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 1) \\
 &\approx 0.5 \cdot 0.3164 + 0.25 \cdot 0.3164 + 0.25 \cdot 0.4219 \approx 0.34
 \end{aligned}$$

Ein Unentschieden hat Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = Y) &= \mathbb{P}((X, Y) \in \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}) \\
 &= \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 2) \\
 &\approx 0.25 \cdot 0.3164 + 0.5 \cdot 0.4219 + 0.25 \cdot 0.2109 \approx 0.34
 \end{aligned}$$

(1 Punkt für das richtige Vorgehen und jeweils 0,5 Punkte für das richtige Ergebnis) Also gewinnt das Kind mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X > Y) - \mathbb{P}(X = Y) \approx 1 - 0.34 - 0.34 \approx 0.32$$

(0,5 Punkte) Also ist der Erwachsene bei diesem Spiel leicht bevorteilt.

Aufgabe H3 Rechnen mit Verteilungen.

- a) Seien X_1, X_2 unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter p . Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.
- b) Sei X binomial verteilt mit Parameter n und p . Berechnen Sie $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

Lösung: a) Um die Unabhängigkeit verwenden zu können, müssen wir zuerst $X_1 = X_2$ in eine Eigenschaft von X_1 und eine Eigenschaft von X_2 aufspalten. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung bezüglich des gleichen Werts:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)^2]^{k-1} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

Für alle Gleichheitszeichen 0,5 Punkte.

b) Wir geben zwei Möglichkeiten an:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_k k(k-1) \rho_X(k) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

(0,5 Punkte pro Gleichheitszeichen) Dabei fällt der Summand für $k=0$, $k=1$ weg und

$$k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Durch Ersetzen von k durch $k' := k-2$ erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)] &= n(n-1) \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'+2} (1-p)^{n-k'-2} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-2-k'} = n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

da nach dem Binomialsatz die letzte Summe gleich $(p+1-p)^{n-2} = 1$ ist. (0,5 Punkte pro Gleichheitszeichen)

Alternativ benutzt man, dass $\mathbb{E}[X] = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$ und wegen $np(1-p) = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (np)^2$ ist $\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$ (1 Punkt)

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2 - X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = np(1-p) + (np)^2 - np = np(1-p + np - 1) = n(n-1)p^2$$

(2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 13. November, 16:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)